الرياضيات بين التطور والأهمية
-٢-

للأستاذ
مجدي ممدوح عزت
معهد الرياض العلمي

قال تعالى : « قل هل يستوي الذين يعلمون والذين لا يعلمون إنما يتذكر أولى الألباب » . . . صدق الله العظيم .

بينا في المقالة السابقة تاريخ الرياضيات وتطورها وأنها أصبحت شيئاً لازماً حتى لهؤلاء الذين لا ينتمون لتخصص معين ، وبينا قيمة مفهوم المجموعة والعلاقة وأنهما يلعبان دوراً هاماً في الرياضيات المعاصرة وتقدم نظرية المجموعات أو الفئات التي تتناول بسط هذين المفهومين وما يتصل بهما من مفاهيم وقضايا متنوعة وأدوات فعالة وأساليب ناجحة لدراسة أي موضوع من الموضوعات الرياضية .

وتعتبر نظرية المجموعات أو الفئات من أهم ما كشف العقل البشري في الرياضيات وقد أسس هذه النظرية جورج كانتور (١٨٥٤–١٩١٨ م) العالم الرياضي المعروف .

لا ترجع أهمية نظرية الفئات إلى مجرد أنها إضافة إلى مجال الرياضيات فحسب بل أنها علاوة على ذلك أمدت الرياضيين بأسس وأساليب جديدة لمعالجة فروع الرياضيات المختلفة التي كانت قائمة كما أتاحت الفرصة لكشف كثير من الفروع الحديثة ولقد ساعدت لغة

ورموز وجبر نظرية الفئات في دراسة هندسة إقليدس وجبر الأعداد ونظرية الدوال الحقيقية كما أنها أصبحت أداة رئيسية في دراسة المنطق والجبر البولي والجبر المجرد والهندسات المختلفة والتوبولوجي .

ومفهوم المجموعة من البساطة بحيث يمكن إدراكه بسهولة من خلال كثير من المواقف التي يصادفها كل منا في حياته اليومية فعند الحديث مثلاً عن حزمه أقلام ، باقة من الأزهار ندرك أننا أمام شيء مكون من عدة أفراد وقد إصطلح علمياً على تسمية هذا الشيء مجموعة (Set) .

عناصر مجموعة :

لقد اصطلح على تسمية كل فرد من أفراد المجموعة عنصر Element وسنرمز للمجموعات بحروف كبيره مثل سـ ، صـ ، ع . . .

ولعناصر مجموعة بأحرف صغيرة مثل أ ، ب ، حـ ، . . . ، س ، ص ، . . .

طرق تعيين مجموعة :

١ — تتعين مجموعة إذا عرفت جميع عناصرها ويمكننا عندئذ كتابة المجموعة بذكر جميع عناصرها بين حاضنتين من الشكل { } مع وضع فاصلة بين كل عنصرين فإذا رمزنا لمجموعة حروف كلمة إنسان مثلاً بـ سـ فإننا نكتب :

سـ = { أ ، ن ، سـ } .

٢ — تتعين المجموعة أيضاً بذكر خاصة يمكن بواسطتها الحكم على أي شيء بأنه عنصر في هذه المجموعة أو أنه غريب عنها وفي هذه الحالة

نرمز لعنصر كيفي مثل ع الذي نسميه (متحولاً Variable) في المجموعة ونعبر عن المجموعة بذكر الخاصة التي يتمتع بها المتحول ع أي الخاصة المميزة التي تتمتع بها جميع عناصر المجموعة المذكورة فالمجموعة س~ السابقة الذكر تكتب بالشكل :

س~ = ع : ع حرف من حروف كلمة إنسان

وتقرأ س~ هي مجموعة العناصر ع حيث ع حرف من حروف كلمة إنســان وقد استخدمنا : عوضاً عن كلمة حيث

مثال : إذا فرضنا أن س مجموعة الأعداد الصحيحة التي تصغر العدد ٦ فيمكننا أن نكتب :

س = ١ ، ٣ ، ٣ ، ٤ ، ٥

أو س = ن : ن عدد صحيح موجب < ٦ .

المجموعات العددية :

إن أكثر المجموعات تداولاً في الدراسات الرياضية هي المجموعات العددية وسنذكر بعضاً منها :

١ ـ مجموعة الأعداد الطبيعية :

ط = [. ، ١ ، ٢ ، ٣ ، . . .]

٢ ـ مجموعة الأعــداد الطبيعية المغايره للصفر .

ط* = [١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، . . .]

٣ – مجموعة الأعداد الصحيحة :

ص = [. . . ، −٣ ، −٢ ، −١ ، ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، . . .] .

٤ – مجموعة الأعداد الصحيحة المغايرة للصفر

ص* = [. . . ، −٣ ، −٢ ، −١ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، . . .]

٥ – مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة والصفر :

ص + = [٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ . . .] .

٦ – مجموعة الأعداد الصحيحة الساليه والصفر .

ص – = . . . ، −٣ ، −٢ ، −١ ،

وهناك أنواع أخــرى من المجموعات العددية .

مفهوم الانتماء :

إذا كان ب عنصر في المجموعة سـ فإننا نقول أن ب ينتمي إلى سـ ونكتب ذلك بالشكل ب ∈ سـ وتقرأ ن تنتمي إلى سـ وإذا أردنا نفي انتماء ب إلى المجموعة سـ كتبنا ب ∉ سـ وتقرأ ب لاتنتمي إلى سـ .

مثال : إذا كانت س = [س : عدد طبيعي زوجي] فإن :

٨ ∈ س ، −٤ ∉ س .

مثال : إذا علمنا أن ص مجموعة الأعداد الصحيحة وأن ص+

مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة والصفر وأن ص− مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة والصفر فإنه يكون :

٣ ∈ ص+ ، ٠ ∈ ص− ، −٥ ∉ ص+ .

المجموعة الخالية : Empty Set

إذا عينا مجموعة بخاصة معينة ووجدنا أنه لا يوجد أي عنصر يتمتع بهذه الخاصة فإننا نقول أن هذه المجموعة خالية ونعطيها الرمز ∅ أو الرمز { } .

مثال : إن مجموعة الأعداد الطبيعية التي تكبر العدد ٢ وتصغر العدد ٣ هي مجموعة خالية لأنه لايوجد بين العددين ٢ ، ٣ أي عدد طبيعي أي
∅ = { س : سـ ∉ ط ، ٢ < س < ٣ } .

المجموعات المنتهية والمجموعات غير المنتهية :
Finite and Unfinite Sets

إن المجموعة سـ = (أ ، ب ، حـ ، د) عناصر أربعة في حين أن مجموعة الأعداد الطبيعية .

ط = (٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، . . .) لا يمكن الانتهاء من عد عناصرها .

تسمى كل مجموعة يمكن الانتهاء من عد عناصرها ولو نظرياً مجموعة منتهية وتقول في الحالة المخالفة أننا أمام مجموعة غير منتهية .

مثال ١ ــ مجموعة الأعداد الطبيعية التي تصغر العدد ٢٠ مجموعة منتهية .

٢ ــ مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية غير منتهية .

تساوي مجموعتين :

يقال لفئتين س ، ص أنهما متساويتان إذا كانتا تتكونان من نفس العناصر بالضبط أي أن الفئتين سـ. صـ تكونان متساويتان إذا كانتا مجرد إسمين لفئة واحدة وفي هذه الحالة تكتب :

سـ = صـ وبصفة عامة تكون مجموعتان سـ. صـ متساويتان إذا كان لهما العناصر نفسها أي أن

س = ص $\longleftrightarrow$ (للمجموعتين س ، ص العناصر نفسها) .

ويمكن تعريف تساوي مجموعتين باستخدام مفهوم الانتماء كما يلي :

تعريف : تكون مجموعتان س ، ص متساويتين إذا كان كل عنصر من س ينتمي إلى ص وكل عنصر من ص تنتمي إلى س .

مثال : س = [أسود ، أبيض ، أحمر] ، ص هي فئة الألوان الرئيسية في علم ج . م . ع . فإن س = ص .

المجموعة الجزئية والاحتواء :

إذا كانت سـ مجموعة طلاب معهد الرياض العلمي و صـ مجموعه طلاب ثانية ثانوي فإن جميع عناصر المجموعة صـ ليست سوى بعض عناصر المجموعة سـ ويقال أن :

مجموعة صـ محتواه في سـ إذا كان كل عنصر من صـ عنصر في وتكتب صـ $\subset$ سـ وتقرأ ص فئة جزئية Subset من س .

إذا كانت صـ ليست فئة جزئية من س فإننا نعبر عن ذلك ص $\not\subset$ س

وهذا يعني أن هناك عنصراً واحداً على الأقل في صـ ولا تبتمي إلى سـ.

ويقال للمجموعة صـ أنها مجموعة جزئية فعلية Proper Set من سـ إذا كانت صـ ⊂ سـ . صـ ≠ سـ .

ويقال في هذه الحالة أن ص محتواه تماماً في س .

وهكذا نرى أنه لايمكننا إستعمال الرمز صـ ⊃ سـ ما لم تتأكد من أمرين :

١ – كل عنصر من سـ هو عنصر في صـ .

٢ – يوجد في سـ عنصر على الأقل لا تنتمي إلى صـ .

مثال : إذا كانت س مجموعة مدن المملكة العربية السعودية ، ص مجموعة المدن العربية فإن :

سـ ⊇ صـ ، س ≠ ص يمكن كتابة سـ ⊆ صـ

إذا كان لدينا مجموعتان سـ . صـ وكان في سـ عنصر واحد على الأقل لاينتمي إلى صـ فإن سـ لا تكون محتواه في صـ ويمكن القول أن المجموعة الخالية ∅ مجموعة جزئية من أي مجموعة سـ .

فتساوي مجموعتان سـ . صـ إذا كانت سـ محتواه في صـ وكانت ص محتواه في :

سـ = صـ ⟷ (سـ ⊇ صـ . صـ ⊇ سـ) .

المجموعة الشاملة : Universal Set

كل مجموعة تهمنا عناصرها أو أجزاؤها أثناء دراستنا تسمى المجموعة الشاملة مثال ذلك مجموعة الأعداد الطبيعية ط هي المجموعة الكلية التي ندرس من خلالها مبادىء الحساب في المرحلة الابتدائية .

(العمليات على المجموعات)

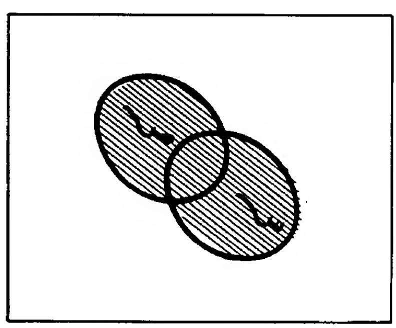
الاتحاد والتقاطع : Union and Interscebion

إذا كانت سـ . صـ مجموعتين فإن المجموعة التي تتكون من جميع العناصر التي تنتمي إلى إحدى الفئتين على الأقل تسمى إتحاد الفئتين سـ . صـ ويرمز لها بالرمز سـ U صـ وتقرأ س إتحاد ص .

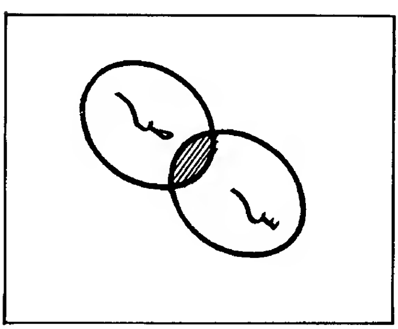
أما الفئة التي تتكون من العناصر المشتركة فقط بين الفئتين س ، ص فتمثل تقاطع الفئتين ويرمز لها بالرمز سـ ∩ صـ وتقرأ سـ ∩ صـ.

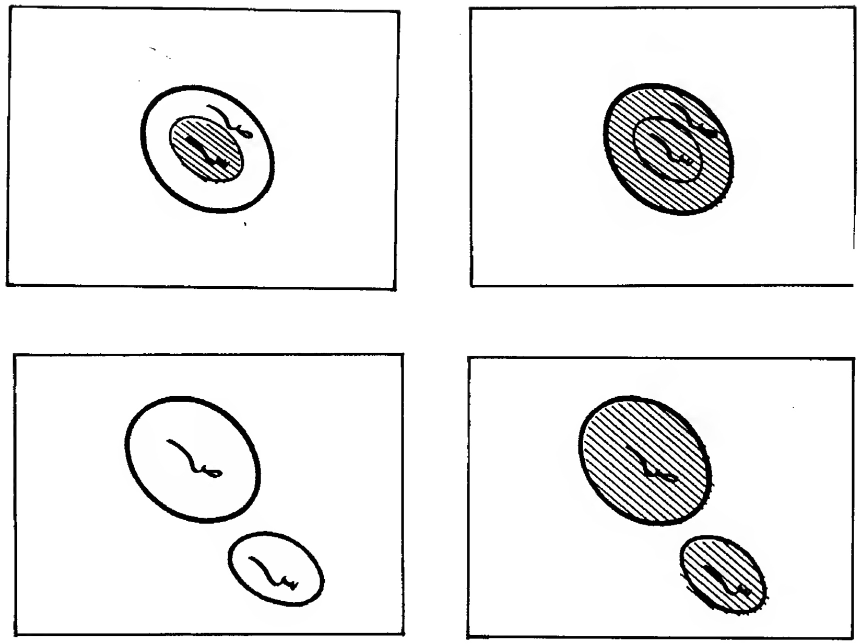
ويمكن إستخدام أشكال فن لتوضيح ذلك .

سـ ⊃ صـ



سـ ⊃ صـ





ويقال لفئتين س، ص إنهما متباعدتان إذا كان $\text{س} \cap \text{ص} = \emptyset$.

خواص عملية الاتحاد :

$\text{س} \cup \text{س} = \text{س}$ وتدعى خاصة اللا نمو .

$\text{س} \cup \emptyset = \text{س}$ وتدعى خاصة العنصر الحيادي

$\text{س} \cup \text{ص} = \text{ص} \cup \text{س}$ وتدعى الخاصة التبديلية .

خواص عملية التقاطع :

$\text{س} \cap \text{س} = \text{س}$ خاصة اللا نمو .

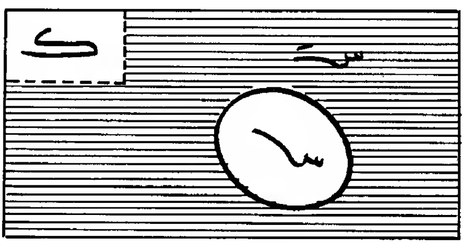
$\text{س} \cap \text{ص} = \text{ص} \cap \text{س}$ الخاصة التبديلية .

$\text{س} \cap \emptyset = \emptyset$.

عملية الاتمام :

مما سبق نلاحظ أن عمليتي الإتحاد والتقاطع تهدف إلى تشكيل مجموعة جديدة من مجموعتين معلومتين ويقال عن مثل هاتين العمليتين عملية ثنائية Binary Operation إلا أن هناك عملية أساسية أحاديه يتم بواسطتها تشكيل مجموعة جديدة من مجموعة معلومة وتسمى هذه العملية عملية الإتمام .

لغرض أن ك مجموعة تمثل طلاب معهد الرياض العلمي في السنوات المختلفة ، س تمثل مجموعة الطلاب في الشهادتين الكفاءة والثانوية فبقية الطلاب تمثل مجموعة الطلاب ما عدا الشهادتين وتشكيل مجموعة جزئية من ك تسمى المجموعة المتممة للمجوعة س وتكتب مكملة سَ ويلاحظ أن كل عنصر من متممه س لا ينتمي إلى سَ.



خواص عملية الإتمام .

$$(\bar{\text{س}})\bar{} = \text{س} \quad . \quad \text{س} \cap \bar{\text{س}} = \emptyset \quad ، \quad \text{س} \cup \bar{\text{س}} = \text{ك}$$

الفرق بين مجموعتين :

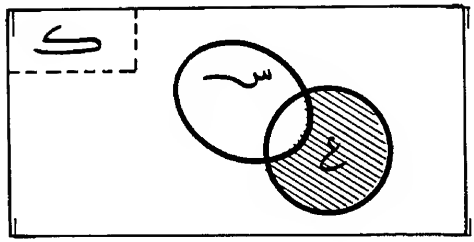
إذا كانت ك مجموعة طلاب السنة النهائية في معهد الرياض العلمي .

س = [س : س طالب عضو في جمعية القرآن الكريم] .

ع = [س : س طالب عضو في جمعية الرياضيات] .

فالمجموعة المكونة من طلاب أعضاء جمعية القرآن الكريم وليسوا أعضاء

في جمعية الرياضيات تسمى الفرق بين المجموعتين ويمكـــن تمثيلها كما يلي ٠



خواص عملية الفرق :

س − ك = ∅

س − س = ∅

س − ع ≠ ع − س

س − ع = س ∩ ع

جبر المجموعات :

(١) خاصتا التبديل :

س ∪ ع = ع ∪ س ، س ∩ ع = ع ∩ س ٠

(٢) خاصتا التوزيع :

س ∪ (ع ∩ ص) = (س ∪ ع) ∩ (س ∪ ص)

س ∩ (ع ∪ ص) = (س ∩ ع) ∪ (س ∩ ص)

خاصتا دي مورجان :

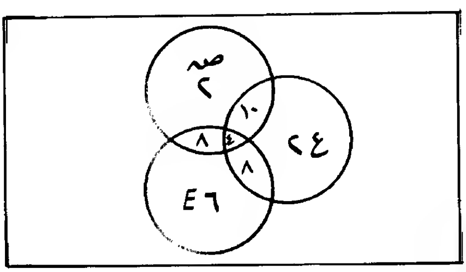
(س ∪ ع)َ = سَ ∩ عَ

(س ∩ ع)َ = سَ ∪ عَ

وبعد عزيزي القارىء لا أدعي إن ما قدمته إليك شيء كامل فالكمال لله وحده سبحانه وتعالى ولكن لعلي سهلت الأمر بعض الشيء داعياً إياك إلى تناول أكثر من كتاب موجود في المكتبة العربية والآن ما رأيك في أن نحل هذا التمرين معاً .

تدريب : في معهد الرياض العلمي عدد طلاب جمعيات النشاط ٤٠ طالب عدد المشتركين في جمعية الرياضيات ٢٤ وعدد المشتركين في جمعية العلوم ٢٤ وعدد الطلاب المشتركين في الجمعيات الثلاث ٤ وعدد المشتركين في الرياضيات والعلوم معاً ١٤ وعدد المشتركين في الرياضيات واللغة الإنجليزية معاً غير مشتركين في العلوم ٨ وعدد المشتركين في العلوم والإنجليزية معاً وغير مشتركين في الرياضيات ٨ أوجد عدد المشتركين في كل جمعية على حده .

يمكـــن الحـــل باستخدام مخططات فين كما يأتي :



سنرمز للرياضيات بالرمز ص والعلوم بالرمز ع والانجليزي بالرمز E واضح من الحل أن عدد المشتركين في جمعية الرياضيات فقط ٢ وجمعية العلوم فقط ٢ وجمعية الإنجليزي فقط ٦ .

والآن عزيزي القارىء ما رأيك في أن تحاول حل هذا التمرين بمفردك .

في مدرسة ما يوجد ٥٠ طالباً يدرسون رياضيات ولغة أجنبية معاً

وأنه يوجد ٨٠ طالباً يدرسون رياضيات فقط وأن ٧٠ طالباً يدرسوط لغة أجنبية فقط فكم عدد طلاب المدرسة ؟ . (٢٠٠)

وبعد لعلنا نكون قد طرقنا معاً ذلك الباب المؤدي إلى تكنولوجيا هذا العصر وأن تكون قد بدأنا الخطوه الأولى في هذه الرحلة الطويله رحلة الألف ميل التي تبدأ بخطوة ، خطوة جادة داعياً الله سبحانه وتعالى إلى توفيق الجميع .

مجدي ممدوح عزت
معهد الرياض العلمي

الصمــــت

لا خـــير في حشو الكـــلا
م اذا اهتديت الـــى عيونـه
والصمــت أجمــل بالفتـــى
مـن منطق في غـــير حينـــه
وعلـــى الفتـــى لطباعـــه
سمـــة تلـــوح علـى جبينـه

قال شاعر آخر :

لا تنكري يـــا عـــز اذا ذل الفتـــى
ذو الأصل واستولـى لئيـم المحتـد
ان البـــزاة رؤوسهـــن عـــواطل
والتـــاج معقـــود برأس الهـدهد